

# POHYBY V CENTRÁLNÍM GRAVITAČNÍM POLI

## (zásobník úloh a námětů do výuky)

Zásobník slouží jako zdroj příkladů a námětů pro učitele, tudíž zde nejsou metodicky rozpracované hodiny. Vyučující zde ale naleznou nápady, které mohou zakomponovat do výuky.

Zásobník je rozdělen na následující části:

- Zásobník úloh – základní úroveň
- Zásobník úloh – pokročilá úroveň
- Náměty do výuky

## Zásobník úloh – základní úroveň

1. Mezikontinentální balistické střely mají dolet až 12 000 km a většinu svého letu vykonají mimo atmosféru. Simulujte pomocí aplikace let takové rakety. Volte malou počáteční výšku nad zemí (řádově metry), počáteční velikost rychlosti  $7\,200\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  a elevační úhel  $19,8^\circ$ . S využitím souřadnic v tabulce určete, do jaké vzdálenosti (měřeno po zemském povrchu) tato raketa dolétla. Je vhodné volit počáteční souřadnicový úhel  $0^\circ$  nebo  $90^\circ$ .

*Odpověď:*

*Už z obrázku je zřejmé, že raketa uletí vzdálenost odpovídající zemskému kvadrantu. Jeho délka činí (viz původní definice metru) téměř přesně 10 000 km. Z tabulky souřadnic lze vyčíst, že odchylka je v řádu jednotek km.*

2. Určete velikost kruhové rychlosti a periodu ve výšce 100 km, 1 000 km, 10 000 km. Vyplňte tabulku.

*Odpověď:*

Výška nad povrchem km	100	1 000	10 000
Rychlost $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	7 389	7 346	4 931
Perioda s	5 193	6 314	20 867

3. V aplikaci Pohyby v homogenním tíhovém poli jsme si mohli ověřit, že nejdelší vrh (neuvažujeme-li odpor prostředí) obdržíme při elevačním úhlu  $45^\circ$ . Zjistěte pomocí aplikace Pohyby v centrálním gravitačním poli optimální elevační úhel pro dosažení nejvzdálenějšího místa dopadu. Počáteční výšku volte 2 m a velikost počáteční rychlosti  $5\text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ . Úlohu řešte s přesností na celé stupně.

*Odpověď:*

*Za daných počátečních podmínek je optimální hodnota elevačního úhlu  $37^\circ$ . Stačí sledovat v tabulce souřadnici  $x$  místa dopadu.*

4. V románu Ocelové město rozehrává Jules Verne špionážní příběh Marcela Bruckmanna, který se vydal do Ocelového města, aby informoval svět o válečných plánech profesora Schultze. Ten chce použít obří hmoždír k vymazání města France-Ville z povrchu zemského. Střela byla vypálena přesně ve tři čtvrtě na dvanáct a ve France-Ville napjatě očekávají dopad střely.

*Na věži odbilo tři čtvrtě na dvanáct!*

*Za čtyři vteřiny nato letěl vysoko ve vzduchu temný předmět nad hlavami rozehvělého zástupu a rychle zmizel, jako nějaká myšlenka, s příšerným bzučením v dáli.*



*„Šťastnou cestu!“ zvolal Marcel s veselým smíchem. „Při takové počáteční rychlosti nemůže střela Herr Schultzeho, která již nyní opustila hranici ovzduší, už nikdy dopadnout na Zemský povrch!“*

*Dvě minuty nato bylo slyšet zahřmění, jakoby zevnitř země vycházelo temné dunění.*

*Bylo to zahřmění děla na Bull Tower, které bylo možné slyšet teprve 113 vteřin po přeletění střely, jelikož ta se hnala s daleko větší, skutečně báječnou rychlostí dál.*

VERNE, Jules. Ocelové město. Brno: Návrat, 1995, ISBN 80-7174-194-9.

- Určete vzdálenost Ocelového města od France-Ville. K výpočtu využijte informace o zvuku výstřelu.
- Určete rychlost projektilu.
- Byla překročena první či druhá kosmická rychlost?
- Simulujte let střely s pomocí aplikace. Elevační úhel nastavte na  $45^\circ$ . Obíhá střela kolem Země?

*Odpovědi:*

- Z rychlosti zvuku (343 m/s) a času mezi výstřelem a zaznamenáním zvuku (117 s) lze určit vzdálenost měst – 40,1 km.*
- Rychlost střely je 10,0 km/s.*
- Byla překročena první kosmická rychlost.*
- Dopadne na zemský povrch.*





## Zásobník úloh – pokročilá úroveň

1. Mezikontinentální balistické střely mají dolet až 12 000 km a většinu svého letu vykonají mimo atmosféru. Simulujte pomocí aplikace let takové rakety. Volte malou počáteční výšku nad zemí (řádově metry), počáteční velikost rychlosti  $7\,300\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  a elevační úhel  $19,6^\circ$ . Zjistěte:
  - a) Jak dlouho trvá, než raketa vystoupí do výšky 400 km, kde již prakticky není bržděna atmosférou.
  - b) Do jaké maximální výšky vystoupá (tzv. apogeum trajektorie)
  - c) Za jakou dobu od startu dosáhne cíle.

*Odpovědi:*

- a) *Do výšky 400 km vystoupá přibližně za 3 minuty.*
- b) *Maximální výška činí asi 1 200 km.*
- c) *Cíle dosáhne za 32,5 minuty.*

(Přestože se jedná o zjednodušený model, jsou tyto výsledky v překvapivě dobré shodě se skutečností).

2. V prosinci 1968 posádka Apolla 8 jako první v dějinách absolvovala let k Měsíci a 24. prosince vstoupila na oběžnou dráhu Měsíce (tzv. selenocetrická dráha) a vykonala 10 obletů Měsíce. První dva oblety s periodou 128 minut sloužily ke korekci trajektorie, zbývajících osm již proběhlo po prakticky kruhové dráze ve výšce 114 km nad povrchem Měsíce. Zjistěte pomocí aplikace:
  - a) Jaká musí být v tomto případě velikost rychlosti.
  - b) Jak dlouhá je oběžná doba a jaký celkový čas tedy strávili astronauté na oběžné dráze kolem Měsíce.

*Odpovědi:*

- a) *K téměř kruhové dráze se přiblížíme při počáteční rychlosti  $1,626\text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ .*
- b) *Oběžná doba po kruhové dráze činí 1h 59,3 min, tedy přibližně dvě hodiny. Celková doba strávená na oběžné dráze je  $8 \cdot 119,3\text{ min} + 2 \cdot 128\text{ min} = 1\,211\text{ min} = 20\text{ h } 11\text{ min}$  (opět velmi dobrá shoda s publikovanými údaji).*

3. Porovnejte výšku, jaké dosáhne střela vystřelená na Zemi, Marsu a Měsíci rychlostí o velikosti  $1\text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$  pod elevačním úhlem  $85^\circ$ . Počáteční výšku nastavte na hodnotu 2 m. Určete rovněž čas, kdy je maximální výšky dosaženo.

*Odpověď:*

*Na Zemi dosáhne výšky 51 km v čase 103 s. Na Marsu výšky 139 km v čase 284 s a na Měsíci 373 km v čase 800 s.*





4. V románu Do Měsíce se vydávají hrdinové Julese Verna v kabině vystřelené obrovským dělem na cestu vesmírem. Na své cestě míjí 8140 km nad zemským povrchem druhý satelit Země.

*“Toto těleso, které jsme již minuli, nebylo ničím jiným než meteoritem, ovšem ohromných rozměrů, kterého zemská přitažlivost zachytila a proměnila v družici.”*

*“Je to možné!” divil se Ardan, “Země má tedy dva měsíce jako Neptun?”*

*“Ano, příteli, dva měsíce, ačkoliv se tvrdí, že má jen jeden. Avšak tento druhý měsíc je tak malý a jeho rychlost je tak veliká, že ho pozemští obyvatelé nemohou vidět. Petit, francouzský hvězdář, poznal oběh tohoto tělesa podle jistých změn v planetární soustavě a vypočítal jeho dráhu. Podle jeho výpočtu vykoná tento meteorit svůj oběh kolem Země za 3 hodiny a 20 minut, což je ovšem náramná rychlost.”*

VERNE, Jules. Do Měsíce. Brno: Návrat, 1995, ISBN 80-7174-505-7.

Francouzský astronom Frédéric Petit navrhoval pro tento druhý měsíc elipsovitou oběžnou dráhu s periodou 2 hodiny 44 minut a 59 sekund. Apogeum se nacházelo ve výšce 3570 km nad povrchem Země a perigeum ve výšce 11,4 km (!) nad povrchem.

- Je reálně možné, aby se těleso s těmito parametry skutečně pohybovalo kolem Země?
- Je možné, aby cestovatelé minuli měsíc ve výšce 8140 km, jak píše J. Verne?
- S pomocí vztahu  $v_p = \pi \frac{R_a + R_p}{T} \sqrt{\frac{R_a}{R_p}}$ , kde  $R_p$  je vzdálenost perigea od středu Země a  $R_a$  vzdálenost apogea od středu Země, určete rychlost Petitova měsíce v perigeu.
- S pomocí aplikace ověřte, zda by s touto rychlostí mohl měsíc obíhat kolem Země.
- S pomocí aplikace zkusmo nalezněte rychlost v perigeu, aby odpovídala parametrům pohybu Petitova měsíce. S pomocí aplikace určete oběžnou dobu měsíce.

Odpovědi:

- Není, protože by těleso vstupovalo do atmosféry.
- Není, apogeum je ve výšce 3570 km. Také oběžné doby jsou jiné. Rozdíl je dán prameny (populární článek), ze kterých Verne čerpal údaje.
- 6,4 km/s
- Měsíc Zemi obíhat nebude.
- Rychlost v perigeu je 8,7 km/s, 7236 s (2 h 36 s).





5. Ve své knize Gulliverovy cesty popisuje Jonathan Swift podivuhodnou létající zemi Laputa. Vědci této země objevili již kolem roku 1727 (datum vydání knihy) dva marsovské měsíce.

*Ta výhoda jim umožnila učinit objevy mnohem rozsáhlejší, než se podařilo našim evropským hvězdářům. Sestavili už seznam deseti tisíc stálic, zatímco v našich největších seznamech je jich toliko třetina toho počtu. Objevili též dvojici menších hvězd neboli satelitů obíhajících kolem Marsu, z nichž vnitřní je vzdálen od středu hlavní oběžnice právě tři její průměry a vnější pět. První se otočí dokola za deset, druhý za jedenadvacet a půl hodiny, takže čtverce doby jejich oběhu jsou téměř v témž poměru jako trojmocniny jejich vzdálenosti od středu Marsu. To zřejmě dokazuje, že se řídí týmž gravitačním zákonem, jemuž podléhají ostatní tělesa nebeská.*

SWIFT, Jonathan. Gulliverovy cesty. Praha: Albatros, 2004, ISBN 80-00-01368-1.

Kdy byly objeveny a jak se jmenují skutečné měsíce Marsu?

- S pomocí informací nalezených na internetu určete orbitální rychlosti skutečných měsíců Marsu (počítejte s kruhovou dráhou).
- S pomocí aplikace simulujte oběh skutečných měsíců kolem Marsu.
- S pomocí informací nalezených na internetu určete orbitální rychlosti románových měsíců Marsu (počítejte s kruhovou dráhou).
- S pomocí aplikace simulujte oběh románových měsíců kolem Marsu.

Odpovědi:

- Phobos (1877), Deimos (1877)
- 2,1 km/s, 1,4 km/s
- Bližší má oběžnou rychlost 3,6 km/s, vzdálenější 2,8 km/s.
- Rychlosti obou měsíců překračují únikovou rychlost pro tyto vzdálenosti od planety a v daných drahách by kolem Marsu neobíhaly.



## Náměty do výuky

Pomocí vztahů  $v_p = \pi \frac{R_a + R_p}{T} \sqrt{\frac{R_a}{R_p}}$  a  $v_a = \pi \frac{R_a + R_p}{T} \sqrt{\frac{R_p}{R_a}}$ , kde  $R_p$  je vzdálenost periapsida (perifokusu) od gravitačního středu soustavy,  $R_a$  vzdálenost apoapsida (apofokusu) od gravitačního středu soustavy a  $T$  je oběžná doba tělesa, lze určit rychlosti tělesa v daných bodech. Tyto rychlosti lze pak použít v aplikaci pro modelování pohybu těles v centrálním gravitačním poli.

Zajímavými tématy pro studium pohybů těles v centrálním gravitačním poli jsou existující i neexistující planety a měsíce planet.

Historie poznávání těles sluneční soustavy s sebou přináší mnohé omyly, které jde využít jako problémové úlohy do výuky. Historie hledání a pozorování těchto objektů je popsána například v článcích, které jde nalézt na internetu:

AUTOR NEUVEDEN. Hypothetical Planets [online]. [cit. 9.4.2022]. Dostupný na WWW: <https://nineplanets.org/hypothetical-planets/#moon2>

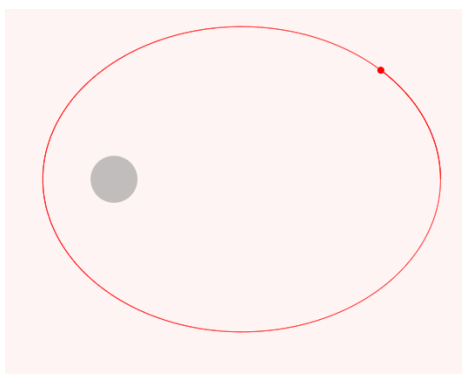
KRAGH, H. The Second Moon of the Earth [online]. [cit. 9.4.2022]. Dostupný na WWW: <https://adsabs.harvard.edu/full/2009JHA....40....1K>

Aplikace lze využít ke studiu Keplerových zákonů.

### 1. Keplerův zákon

*Planety obíhají kolem Slunce po eliptických drahách, v jejichž jednom společném ohnisku je Slunce.*

Aplikace jde využít k popisu tohoto zákona vykreslením kuželoseček.



### 2. Keplerův zákon

*Obsahy ploch opsaných průvodičem planety (spojnice planety a Slunce) za stejný čas jsou stejně velké.*

Výpočet plošné rychlosti ( $w = \frac{1}{2} r \cdot v$ ), provedený tabulkovým procesorem pomocí dat aplikace ukazuje, že plošná rychlost modelovaného tělesa kolísá. Nesrovnalost aplikace s teorií je způsobena numerickými výpočty v aplikaci.

### 3. Keplerův zákon

*Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet je stejný jako poměr třetích mocnin délek jejich hlavních poloos (středních vzdáleností těchto planet od Slunce).*

Aplikace umožňuje práci s tímto zákonem. Ze zadaných dat získáváme využitím tabulkového procesoru přesné výsledky.